

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Лекция №3, 4

План лекции:

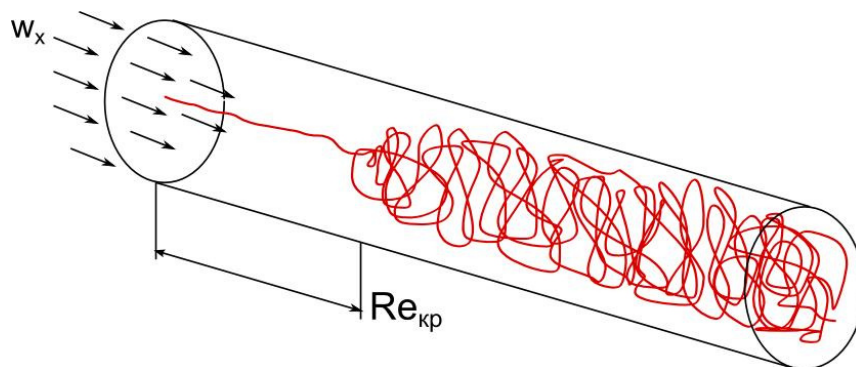
1. Общие понятия о турбулентности
2. Дифференциальные уравнения турбулентного пограничного слоя
3. Моделирование турбулентности. Турбулентная вязкость и число Прандтля.
4. Модель турбулентности Прандтля

1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Как впервые показал Рейнольдс, изучая движение воды в трубах и каналах, следует различать два режима течения жидкости – **ламинарный и турбулентный**.

Ламинарное течение представляет собой движение слоёв жидкости относительно друг друга (слоистое течение).

При достаточно высоких числах Рейнольдса течение перестаёт быть упорядоченным. Возникает сильное перемешивание, которое легко сделать видимым, если ввести в поток подкрашенную струйку жидкости. При ламинарном режиме течения подкрашенная жидкость движется в виде чётко очерченной струйки. Как только течение становится турбулентным подкрашенная струйка жидкости размывается потоком и краска заполняет всё сечение канала.



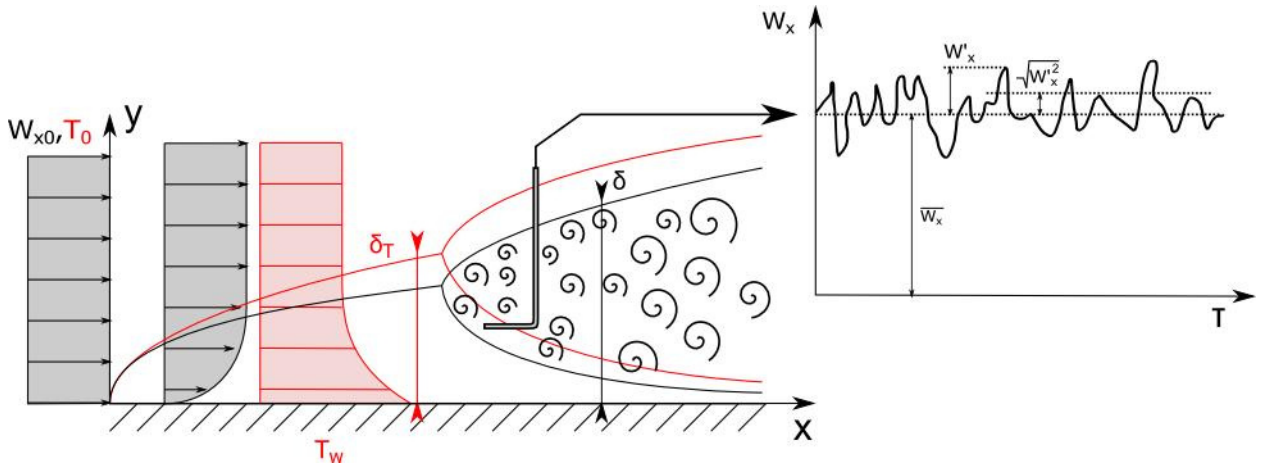
Турбулентное течение представляет собой движение жидкости, на которое наложены сильные поперечные колебания скорости. Говорят, что течение носит хаотический характер. Поперечные колебания приводят к существенному перемешиванию слоёв жидкости, к более равномерному заполнению профиля скорости. При турбулентном режиме течения усиливается обмен импульсом между слоями, возрастает теплообмен и массообмен.

Значение числа Рейнольдса, при котором течение теряет устойчивость и происходит переход от ламинарного режима течения к турбулентному называется **критическим $Re_{кр}$** .

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

При выводе уравнений пограничного слоя мы нигде особо не оговаривали режим течения, не вводили каких-либо ограничений на переменные, входящие в систему уравнений, однако получить решение для турбулентного течения в пограничном слое по известным нам уравнениям не получится. Дело в том, что **турбулентность – это, по сути, процесс зарождения распространения, взаимодействия и диссипации нестационарных вихрей связанных с неустойчивостью вязкого течения**. Для расчёта каждого из них и их общего воздействия на пограничный слой требуется решение

трёхмерных и нестационарных задач динамики жидкости, что выходит за рамки теории пограничного слоя и находится на грани возможностей современных вычислительных ресурсов, доступных исследователям. Хотя прямое описание турбулентности затруднено, в её развитии можно выделить определённые закономерности и построить, так называемую модель турбулентности, которую в дальнейшем можно применить для решения тех или иных задач пограничного слоя. С чего же начать описание турбулентности?



Начать следует с рассмотрения зависимости параметров течения (скорости потока, плотности, температуры и др.) от времени при турбулентном режиме течения. Эти зависимости носят пульсационный характер. На рисунке выше приведены характерные для турбулентного течения показания датчика давления (трубки Пито).

Как видно из рисунка показания датчика можно разделить на среднюю и пульсационную составляющие:

$$w_x(\tau) = \overline{w_x} + w'_x(\tau). \quad (1)$$

Появление пульсационной составляющей и есть проявление турбулентности течения. По аналогии все остальные переменные также можно разделить на две части средние и пульсационные:

$$\begin{aligned} w_y(\tau) &= \overline{w_y} + w'_y(\tau) \\ T(\tau) &= \overline{T} + T'(\tau) \\ \rho(\tau) &= \overline{\rho} + \rho'(\tau) \\ p(\tau) &= \overline{p} + p'(\tau) \\ \mu(\tau) &= \overline{\mu} + \mu'(\tau) \\ \lambda(\tau) &= \overline{\lambda} + \lambda'(\tau) \\ c_p(\tau) &= \overline{c_p} + c'_p(\tau) \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, что средние значения величин не зависят от времени, в то время как пульсационные являются сложной функцией времени.

Запишем систему уравнений Навье-Стокса в двумерном стационарном приближении в консервативной форме. Отбросим силу тяжести и внутренние источники теплоты.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial(\rho w_x w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y w_x)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial p}{\partial x}, \\
\frac{\partial(\rho w_x w_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y w_y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y}, \\
c_p \frac{\partial(\rho w_x T)}{\partial x} + c_p \frac{\partial(\rho w_y T)}{\partial y} = w_x \frac{\partial p}{\partial x} + w_y \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
+ 2\mu \left(\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)^2 \right).
\end{array} \right. \quad (3)$$

Ограничимся рассмотрением течений с теплофизическими и переносными свойствами, независящими от пульсационного движения среды, $c'_p = 0$, $\mu' = 0$, $\lambda' = 0$. Будем считать, что плотность и давление при изменении скорости за счёт пульсации также остаются постоянными $\rho' = 0$, $p' = 0$. Кроме того, будем считать, что теплоёмкость среды не зависит от температуры и давления $c_p = \text{const}$. Подставим в первое уравнение системы уравнений (3) соотношения (1) и (2):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\bar{\rho}(\bar{w}_x + w'_x))}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}(\bar{w}_y + w'_y))}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial(\bar{\rho} w'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} w'_y)}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \quad (4)$$

Проведём осреднение полученного уравнения по времени, причём за время осреднения примем период достаточно продолжительный, чтобы пульсации не изменяли средних параметров течения и достаточно короткий, чтобы нестационарные процессы не «затерялись» процедурой осреднения. Во многом этот выбор интуитивен, но, как правило, его можно сделать, так как скорость нестационарных процессов в потоке на порядок (или даже несколько порядков) меньше скорости турбулентных пульсаций.

Процедура осреднения представляет собой взятие интеграла вида:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} f(\tau) d\tau \quad (5)$$

от каждого члена уравнения. Относительно осреднения пульсационных величин можно записать несколько правил:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{f} \rangle &= \bar{f}, \quad \langle f' \rangle = 0 \\
\langle \bar{f} \cdot \bar{g} \rangle &= \bar{f} \cdot \bar{g}, \quad \langle \bar{f} \cdot g' \rangle = 0, \quad \langle f' \cdot \bar{g} \rangle = 0, \quad \langle f' \cdot g' \rangle \neq 0
\end{aligned} \quad (6)$$

Запишем почленно:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial(\overline{\rho w_x})}{\partial x} \right\rangle &= \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\partial(\overline{\rho w_x})}{\partial x} d\tau = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} (\overline{\rho w_x}) d\tau \right) = \frac{\partial(\overline{\rho w_x})}{\partial x} \\
\left\langle \frac{\partial(\overline{\rho w'_x})}{\partial x} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} (\overline{\rho w'_x}) d\tau \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{\rho} \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} (w'_x) d\tau \right) = 0 \\
\left\langle \frac{\partial(\overline{\rho w_y})}{\partial y} \right\rangle &= \frac{\partial(\overline{\rho w_y})}{\partial y} \\
\left\langle \frac{\partial(\overline{\rho w'_y})}{\partial y} \right\rangle &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

В итоге осреднённое уравнение неразрывности можно записать в виде:

$$\frac{\partial(\overline{\rho w_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho w_y})}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

Как видно, осреднённое уравнение неразрывности не изменилось. Связано это с тем, что в подынтегральные выражения входили только произведения средних величин на пульсационные или произведения средних.

Применяя правила осреднения (6) к остальным уравнениям получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\overline{\rho w_x w_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \langle w'_x w'_x \rangle)}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho w_y w_x})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \langle w'_y w'_x \rangle)}{\partial y} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial \overline{w_x}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial \overline{w_x}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w_y}}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x}, \\
&\frac{\partial(\overline{\rho w_x w_y})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \langle w'_x w'_y \rangle)}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho w_y w_y})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \langle w'_y w'_y \rangle)}{\partial y} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial \overline{w_y}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w_x}}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial \overline{w_y}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \overline{p}}{\partial y}, \\
&c_p \frac{\partial(\overline{\rho w_x T})}{\partial x} + \frac{\partial(c_p \rho \langle w'_x T' \rangle)}{\partial x} + c_p \frac{\partial(\overline{\rho w_y T})}{\partial y} + \frac{\partial(c_p \rho \langle w'_y T' \rangle)}{\partial y} = \\
&= \overline{w_x} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \overline{w_y} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} \right) \\
&+ 2\mu \left(\left(\frac{\partial \overline{w_x}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{w_y}}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \overline{w_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w_y}}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{w_x}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w_y}}{\partial x} \right)^2 \right) + \\
&+ 2\mu \left(\left\langle \left(\frac{\partial w'_x}{\partial x} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial w'_y}{\partial y} \right)^2 \right\rangle - \frac{1}{3} \left\langle \left(\frac{\partial w'_x}{\partial x} + \frac{\partial w'_y}{\partial y} \right)^2 \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial w'_x}{\partial y} + \frac{\partial w'_y}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \right).
\end{aligned}$$

Можно заметить, что ненулевые осреднённые произведения пульсационных величин (**корреляции пульсаций**) входят в конвективные члены уравнений и в диссипативный

член уравнения энергии. Следуя Рейнольдсу, перенесём эти члены в правую часть и объединим с вязкими членами в уравнениях движения и с теплопроводностью в уравнении энергии.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{\rho w_x w_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho w_y w_x})}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial \overline{w_x}}{\partial x} - \rho \langle w'_x w'_x \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial \overline{w_x}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w_y}}{\partial x} \right) - \rho \langle w'_y w'_x \rangle \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\overline{\rho w_x w_y})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho w_y w_y})}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial \overline{w_y}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w_x}}{\partial y} \right) - \rho \langle w'_x w'_y \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial \overline{w_y}}{\partial y} - \rho \langle w'_y w'_y \rangle \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \\ c_p \frac{\partial(\overline{\rho w_x T})}{\partial x} + c_p \frac{\partial(\overline{\rho w_y T})}{\partial y} &= \overline{w_x} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \overline{w_y} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - c_p \rho \langle w'_x T' \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - c_p \rho \langle w'_y T' \rangle \right) + \\ &+ 2\mu \left(\left(\frac{\partial \overline{w_x}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{w_y}}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \overline{w_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w_y}}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{w_x}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w_y}}{\partial x} \right)^2 \right) + \\ &+ 2\mu \left(\left\langle \left(\frac{\partial w'_x}{\partial x} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial w'_y}{\partial y} \right)^2 \right\rangle - \frac{1}{3} \left\langle \left(\frac{\partial w'_x}{\partial x} + \frac{\partial w'_y}{\partial y} \right)^2 \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial w'_x}{\partial y} + \frac{\partial w'_y}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \right) \end{aligned}$$

Как видно, полученные таким образом осреднённые уравнения, отличаются от исходных уравнений только **дополнительными напряжениями**, возникающими за счёт турбулентных пульсаций и **дополнительным турбулентным переносом теплоты**. Вместе с тем эти дополнительные величины не определены заранее и зависят от динамики течения, свойств турбулентности и т.д. Осреднённая система уравнений, таким образом, становится незамкнутой, и для её решения требуются дополнительные уравнения, связывающие турбулентные величины с параметрами осреднённого течения.

Прежде чем искать способы замыкания упростим полученную систему осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса с использованием гипотезы Прандтля и оценки порядка величин, т.е. перейдём к уравнениям пограничного слоя. Опуская черту над средними значениями переменных, итоговую систему уравнений можно записать в виде:

уравнение неразрывности (сохранения массы):

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

уравнения движения (сохранения импульсов):

по оси x

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} - \rho \langle w'_y w'_x \rangle \right) - \frac{dp}{dx}, \quad (10)$$

по оси y

$$p = \text{const}, \quad (11)$$

уравнение энергии:

$$\rho w_x c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w_y c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - c_p \rho \langle w'_y T' \rangle \right) + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \mu \left\langle \left(\frac{\partial w'_x}{\partial y} \right)^2 \right\rangle + w_x \frac{dp}{dx}. \quad (12)$$

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ И ЧИСЛО ПРАНДТЛЯ.

В практических расчётах турбулентных пограничных слоёв часто пользуются предположением о том, что турбулентные пульсации как бы увеличивают вязкость жидкости (гипотеза Бусинеска). Оно основано на том, что в турбулентном пограничном слое увеличивается трение, теплообмен и массообмен и это эквивалентно тому, как если бы при ламинарном режиме течения мы заменили бы жидкость на более вязкую. Однако следует отметить, что если **молекулярная вязкость – это свойство жидкости и зависит только от параметров потока, таких как температура и давление, то турбулентная вязкость в основном зависит только от динамики течения и может значительно изменяться даже по толщине пограничного слоя.** Многие модели турбулентности построены на том, чтобы как можно точно и обобщённо, т.е. для разного вида течений, промоделировать изменение турбулентной вязкости в зависимости от таких параметров, как расстояние от стенки, скорость потока, уровень турбулентности в набегающем потоке и т.д. Такие модели классифицируются, как модели для турбулентной вязкости.

Запишем выражение для турбулентных пульсаций входящих в уравнения пограничного слоя (9) - (12), с учётом определения турбулентной вязкости:

$$-\rho \langle w'_y w'_x \rangle = \mu_t \frac{\partial w_x}{\partial y},$$

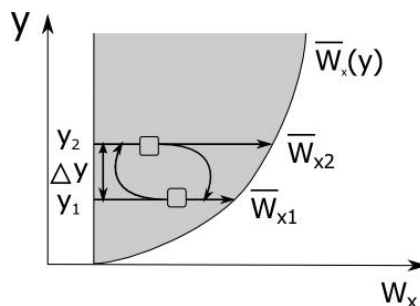
$$-c_p \rho \langle w'_y T' \rangle = \lambda_t \frac{\partial T}{\partial y} = c_p \frac{\lambda_t}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} = c_p \frac{\lambda_t}{c_p \mu_t} \mu_t \frac{\partial T}{\partial y} = c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial y} \text{ и}$$

$$\mu \left\langle \left(\frac{\partial w'_x}{\partial y} \right)^2 \right\rangle = \mu_t \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2.$$

Часто турбулентную теплопроводность заменяют отношением **турбулентной вязкости к турбулентному числу Прандтля**, это связано с тем, что турбулентный теплоперенос, как и турбулентный перенос импульса в большей степени зависит от гидродинамики течения. Турбулентное число Прандтля либо принимают постоянной величиной близкой к 1 либо моделируют некоторым образом, подобно моделированию турбулентной вязкости.

4. МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРАНДТЛЯ

Алгебраические модели турбулентности строятся в основном на гипотезе **длины пути смешения**, выдвинутой Прандтлем. Прандтль предположил, что турбулентная вязкость пропорциональна градиенту скорости потока в направлении перпендикулярном поверхности, а коэффициент пропорциональности представляет собой **длину пути смешения, т.е. путь который проходит некоторый конечный объём жидкости поперёк пограничного слоя под действием турбулентной пульсации без изменения своего импульса.** Модели, построенные на этих предположениях, имеют вид обыкновенных алгебраических уравнений относительно величины турбулентной вязкости.



Рассмотрим в параллельном потоке два слоя жидкости на расстоянии Δy . Скорости потока в этих слоях различны. Из-за турбулентных пульсаций происходит обмен количеством движения между отдельными слоями. Моль жидкости, перемещаясь между слоями, на некотором расстоянии (длине пути смешения) сохраняет свой импульс. Таким образом, слои жидкости с меньшей скоростью ускоряются, а с большей скоростью тормозятся за счёт турбулентных пульсаций. Пульсация представляет собой разность средних скоростей в слоях жидкости, между которыми перемещается рассматриваемый моль - $w'_x = \overline{w_{x2}} - \overline{w_{x1}}$, или в дифференциальной форме $w'_x = l_m \frac{d\overline{w_x}}{dy}$. Для второй

компоненты скорости также можно записать $w'_y = l_m \frac{d\overline{w_y}}{dy}$. Тогда:

$$-\rho \langle w'_y w'_x \rangle = \rho l_m^2 \left| \frac{d\overline{w_x}}{dy} \right| \left(\frac{d\overline{w_x}}{dy} \right) = \mu_t \frac{\partial w_x}{\partial y}. \quad (13)$$

Отсюда, уравнение для турбулентной вязкости в модели Прандтля записывается следующим образом:

$$\mu_t = \rho \cdot l_m^2 \left| \frac{\partial w_x}{\partial y} \right|, \quad (14)$$

где l_m - длина пути смешения. Длина пути смешения является достаточно сложной функцией и для её адекватного описания требуется привлечение экспериментальной информации. Так, известно, что пристенный турбулентный пограничный слой можно разбить на две части: вблизи стенки располагается **ламинарный подслой**, где **турбулентная вязкость и длина пути смешения близки к нулю** и **турбулентное ядро**, где **длина пути смешения практически постоянна**.

В модели Прандтля длина пути смешения рассчитывается следующим образом:

$$l_m = \begin{cases} C_k y \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right), \\ C_1 \delta, \end{cases} \quad (15)$$

где первое уравнение относится к ламинарному подслою, а второе к турбулентному ядру. Переход от ламинарного подслоя к турбулентному ядру определяется в зависимости от y

из условия: $C_k y \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right) = C_1 \delta$. Здесь $y^+ = v^+ \frac{\rho y}{\mu}$, $v^+ = w_{x0} \sqrt{\frac{c_f}{2}}$ - скорость трения,

$\frac{c_f}{2} = \frac{\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{ст}}{\rho_0 w_{x0}^2}$ - коэффициент трения на стенке; δ - толщина пограничного слоя, определённая по критерию $(0.995 \cdot u_0)$.

Константы модели: $A^+ = 26$, $C_k = 0.41$ - постоянная Кармана, $C_1 = 0.089$.

Турбулентное число Прандтля при расчёте теплообмена по модели Прандтля, как правило, выбирается постоянным: $Pr_t = 0,9$.